חדוא 2

פרק 10 - משפטי הערך הממוצע של רול, לגראנז', קושי ודרבו

תוכן העניינים

1. משפט רול 1
2. משפט לגראנז׳ - הוכחת אי שוויונים בקטע [a,b] 5

משפט רול

שאלות

1) בדקו האם הפונקציה הנתונה, $f(x)$ בקטע הנתון, מקיימת את תנאי משפט רול, ומצאו את כל ערכי c המקיימים את מסקנת משפט רול:

א. $[0,2]$ $\quad f(x)=x^3-3x^2+2x$

ב. $[-1,1]$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$

2) נתון ש- $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$.

הראו ש- $f(1)=f(5)$, אך אין נקודה c, כך ש- $f'(c)=0$.

האם הדבר סותר את משפט רול? נמקו.

3) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- $\mathbb{R}$,

ונניח שקיימות שלוש נקודות שונות, x_0,x_1,x_2 , עבורן $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$.

הוכיחו שקיים c ממשי, כך ש- $f''(c)=0$.

4) תהי $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שלכל n טבעי מתקיים $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$.

הוכיחו שקיימת $x_0\in(0,1)$, כך ש- $f'''(x_0)=0$.

5) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה 3 פעמים.

נניח שמתקיים $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$.

הראו שלמשוואה $f'''(x)=0$ יש פתרון.

6) נתון כי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.

נתון בנוסף כי f פונקציה זוגית שיש לה נקודת מינימום מקומית ב- $x_0=2$.

הוכיחו כי יש שתי נקודות שונות בהן הנגזרת השנייה מתאפסת.

7) נתונה פונקציה f, גזירה ב- $\mathbb{R}$.
תהי g מוגדרת על ידי $g(x)=(x^2-1)f(x)$.
הראו כי g גזירה ב- $\mathbb{R}$, והוכיחו כי הנגזרת, g',
מתאפסת לפחות פעם אחת בקטע $(-1,1)$.

8) הוכיחו:
אם f גזירה ב- $\mathbb{R}$ ו- $f(1)=0$, אז הפונקציה $g(x)$, המוגדרת על ידי
$g(x)=xf(x)$, גזירה ב- $\mathbb{R}$, וישנו פתרון ממשי למשוואה $g'(x)=0$.

9) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0$ ו- $f(x)>0$ לכל $0<x\le 1$.
הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $\frac{f'(c)}{f(c)}=2\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$.

10) אם $c_0+\frac{c_1}{2}+...+\frac{c_{n-1}}{n}+\frac{c_n}{n+1}=0$ $(c_i\in\mathbb{R})$,
הוכיחו שלמשוואה $c_0+c_1x+...+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n=0$
יש לפחות פתרון אחד בקטע $(0,1)$.

11) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה, כך ש- $f(0)=0,\ f(1)=1$.
הראו שלמשוואה $f'(x)=2x$ קיים פתרון בקטע $(0,1)$.

12) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות.
נניח שלכל x ממשי מתקיים $f'(x)g(x)\ne g'(x)f(x)$.
הראו שבין כל שני שורשים של f קיים לפחות שורש אחד של g.

13) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה,
כך ש- $f(0)=f(1)=0$ ו- $f'(0)>0,\ f'(1)>0$.
א. הוכיחו שקיימת סביבה שמאלית של 1, שבה הפונקציה הנתונה שלילית.
ב. הוכיחו שקיימת סביבה ימנית של 0, שבה הפונקציה הנתונה חיובית.
ג. הוכיחו שהנגזרת של הפונקציה מתאפסת לפחות פעמיים בקטע $(0,1)$.

14) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.
נניח שלכל n טבעי $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$.
חשבו את $f''(0)$.

ב. תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים, כך ש- $f''(0)>0$.
הוכיחו שקיים n טבעי, כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right)\neq 1$.

15) תהי $f:(-1,2)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים.
נניח שלכל n טבעי $f\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$.
חשבו את $f''(1)$.

16) נתון כי f,g גזירות לכל x וכי $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\neq 0$ ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)g(x)=A$ יש לכל היותר פתרון אחד.
A קבוע כלשהו.

17) נתון כי f גזירה לכל x וכי $f'(x)$ חד-חד ערכית ב- $\mathbb{R}$.
תהי x_0 נקודה כלשהי.
הוכיחו כי לגרף של $y=f(x)$ ולישר המשיק בנקודה x_0 יש נקודה משותפת אחת ויחידה - x_0.
במילים אחרות: הוכיחו כי הגרף של $y=f(x)$ נמצאו כולו מעל המשיק או מתחתיו.

18) נתון כי f גזירה פעמיים בקטע (a,b), ולכל $x\in(a,b)$ מתקיים $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.
נתון שלמשוואה $f'(x)=0$ יש שלושה פתרונות בקטע.
הוכיחו שלמשוואה $f(x)=0$ יש לפחות שני פתרונות בקטע.
תנו דוגמה לפונקציה f המקיימת $(f'(x))^2\neq f(x)\cdot f''(x)$.

19) נתון כי $f(x),\ g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b).
נתון בנוסף כי $f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$.
הוכיחו שקיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=g'(c)$.

20) הפונקציות f ו- g רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b).
ידוע כי $f(a)\geq g(a)$ ו- $f'(x)>g'(x)$ ב- (a,b).
הוכיחו כי $f(x)>g(x)$ ב- $(a,b]$.

תשובות סופיות

1) א. כן, $1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. ב. כן, $2-\sqrt{3}$.

2) לא, מכיוון שהפונקציה לא רציפה בנקודה $x=3$.

14) א. 0 ב. שאלת הוכחה.

15) 0

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפט לגראנז' – הוכחת אי שוויונים בקטע $[a,b]$

שאלות

הוכיחו את אי השוויונים הבאים בתחום הרשום לידם:

1) $$\left(0<a<b\right)\quad \frac{b-a}{b}<\ln\left(\frac{b}{a}\right)<\frac{b-a}{a}$$

2) $$\left(0<a<b\right)\quad \frac{b-a}{2\sqrt{b}}<\sqrt{b}-\sqrt{a}<\frac{b-a}{2\sqrt{a}}$$

3) $$\left(a<b\right)\quad \left(a-b\right)e^{-a}<e^{-b}-e^{-a}<\left(a-b\right)e^{-b}$$

4) $$\left(0<a<b<\frac{\pi}{2}\right)\quad \frac{b-a}{\cos^2 a}<\tan b-\tan a<\frac{b-a}{\cos^2 b}$$

5) $$\left(0<a<b\right)\quad \frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}$$

6) $$\left(0<a<b<1\right)\quad \frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}}<\arcsin b-\arcsin a<\frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$$

7) $$\left(0<a<b\right)\quad \frac{b-a}{\sqrt{1+b^2}}<\frac{\operatorname{arcsinh}\left(b\right)-\operatorname{arcsinh}\left(a\right)}{b-a}<\frac{b-a}{\sqrt{1+a^2}}$$

8) $$\left(0<a<b<1\right)\quad \frac{b-a}{1-a^2}<\operatorname{arctanh}\left(b\right)-\operatorname{arctanh}\left(a\right)<\frac{b-a}{1-b^2}$$

9) $\sqrt[n]{b}\cdot\frac{b-a}{n\cdot b}<\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{a}\cdot\frac{b-a}{n\cdot a}$ $(0<a<b)$

10) $\frac{2b(b-a)}{b^2+1}<\ln\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right)<\frac{2a(b-a)}{a^2+1}$ $(1<a<b)$

11) $\ln b-\ln a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\le\frac{1}{4}(b-a)$ $(1<a<b<3)$

12) $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

13) $|\cos x_2-\cos x_1|\le|x_2-x_1|$ $(x_1<x_2)$

14) $|\arctan y-\arctan x|\le|y-x|$ $(x<y)$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il